Abstract

We present improved results for approximating maximum-weight independent set (MaxIS) in the CONGEST and LOCAL models of distributed computing. Given an input graph, let n and Δ be the number of nodes and maximum degree, respectively, and let MIS(n, Δ) be the the running time of finding a “maximal” independent set (MIS) in the CONGEST model. Bar-Yehuda et al. [PODC 2017] showed that there is an algorithm in the CONGEST model that finds a Δ-approximation for MaxIS in O(MIS(n, Δ)logW) rounds, where W is the maximum weight of a node in the graph, which can be as high as poly(n). Whether their algorithm is deterministic or randomized depends on the MIS algorithm that is used as a black-box.

分散コンピューティングのCONGESTモデルとLOCALモデルで最大重み独立集合（MaxIS）を近似するための改善された結果を示します。入力グラフが与えられた場合、nとΔをそれぞれノード数と最大次数とし、MIS（n、Δ）をCONGESTモデルにおいて極大独立集合（MIS）を見つける実行時間とします。Bar-Yehudaら[PODC 2017]は、CONGESTモデルにおいてMaxISのΔ近似をO（MIS（n、Δ）logW）ラウンドで見つけるアルゴリズムがあることを示しました。ここで、Wはグラフ中のノードの最大重みです。これはpoly（n）と同じくらい高くなる可能性があります。それらのアルゴリズムが決定論的であるかランダム化されているかは、ブラックボックスとして使用されるMISアルゴリズムに依存します。

Our main result in this work is a randomized (poly(loglog n)/ε)-round algorithm that finds, with high probability, a (1+ϵ)Δ-approximation for MaxIS in the CONGEST model. That is, by sacrificing only a tiny fraction of the approximation guarantee, we achieve an “exponential” speed-up in the running time over the previous best known result. Due to a lower bound of Ω(√(logn/loglogn)) that was given by Kuhn, Moscibroda and Wattenhofer [JACM, 2016] on the number of rounds for any (possibly randomized) algorithm that finds a maximal independent set (even in the LOCAL model) this result implies that finding a (1+ϵ)Δ-approximation for MaxIS is exponentially easier than MIS.

この論文での主な結果は、CONGESTモデルにおいてMaxISの（1 + ϵ）Δ近似を高確率で見つけるランダム化された（poly（loglog n）/ε）ラウンドアルゴリズムです。つまり、近似保証のごく一部を犠牲にすることで、以前の最もよく知られている結果よりも実行時間の「指数関数的」な高速化を実現します。Kuhn、Moscibroda、およびWattenhofer [JACM、2016]によって与えられた極大独立集合を見つける（おそらくランダム化された）アルゴリズムのラウンド数のΩ（√（logn / loglogn））の下限により、この結果は(LOCALモデルでさえも)MaxISの（1 + ϵ）Δ近似を見つけることがMISよりも指数関数的に簡単であることを意味します。

1 Introduction and Related Work

One of the most fundamental problems in distributed graph algorithms is the maximal independent set problem (MIS), where given an input graph, we need to find a maximal subset of the nodes such that no two nodes in the subset are adjacent. This problem has received a tremendous amount of attention in various distributed models (see for example [1, 3, 6, 11–13, 25, 26, 28, 31, 33–38, 41]). It is considered one of the four classic problems of local distributed algorithms, along with edge coloring, vertex coloring, and maximal matching [10, 24, 37].

分散グラフアルゴリズムの最も基本的な問題の1つは、極大独立集合問題（MIS）です。ここで、入力グラフが与えられた場合、部分集合内の2つのノードが隣接しないようにノードの極大部分集合を見つける必要があります。 この問題は、さまざまな分散モデルで非常に大きな注目を集めています（たとえば、[1、3、6、11–13、25、26、28、31、33–38、41]を参照）。 これは、辺彩色、頂点彩色、および極大マッチング[10、24、37]とともに、ローカル分散アルゴリズムの4つの古典的な問題の1つと見なされます。

Independent sets have many applications in practical and theoretical computer science. Especially independent sets of large size. These include applications in economics [14], computational biology [18, 42], coding theory [16, 19], and experimental design [5]. In unweighted graphs, a maximum independent set is an independent set of maximum size. In weighted graphs, a maximum-weight independent set (MaxIS) is an independent set of maximum total weight, where by total we mean the sum of weights of nodes in the independent set.

独立集合は、実用的および理論的なコンピュータサイエンスで多くの用途があります。特に大きなサイズの独立集合。これらには、経済学[14]、計算生物学[18、42]、符号理論[16、19]、および実験計画法[5]への応用が含まれます。重み付けされていないグラフでは、最大独立集合は最大サイズの独立集合です。 重み付きグラフでは、最大重み独立集合（MaxIS）は、最大合計重みの独立集合です。ここで、合計とは、独立集合内のノードの重みの合計を意味します。

In an unweighted graph, any MIS constitutes a ∆-approximation for MaxIS, where ∆ is the maximum degree of a node in the graph. This implies that MIS cannot be easier than ∆-approximation for MaxIS in unweighted graphs, regardless of the computational model. This leaves a natural question of whether ∆-approximation for MaxIS is easier than MIS. In the classical sequential setting, finding an MIS has the same complexity as finding a ∆-approximation for MaxIS (even in weighted graphs) as both problems admit simple linear-time greedy algorithms. In this work, we show that in the distributed setting, finding a (1 + ε)∆-approximation for MaxIS is exponentially easier than MIS.

重み付けされていないグラフでは、MISはMaxISのΔ近似を構成します。ここで、Δはグラフ内のノードの最大次数です。これは、計算モデルに関係なく、重み付けされていないグラフでMISがMaxISのΔ近似よりも簡単になることはないことを意味します。これは、MaxISのΔ近似がMISよりも簡単かどうかという自然な疑問を残します。古典的なシーケンシャル設定では、両方の問題が単純な線形時間グリーディアルゴリズムを認めているため、MISを見つけることは、MaxISのΔ近似を見つけることと同じ複雑さです（重み付きグラフでも）。この論文では、分散設定で、MaxISの（1 +ε）Δ近似を見つけることがMISよりも指数関数的に簡単であることを示します。

Distributed Computing and Our Results

The major two models of distributed graph algorithms are the LOCAL and CONGEST models. In the LOCAL model [34], there is a synchronized communication network of n computationally-unbounded nodes, where each node has a unique O(log n)-bit identifier. In each communication round, each node can send an unbounded-size message to each of its neighbors. The task of the nodes is to compute some function of the network (e.g., its diameter, the value of a maximum independent set, etc.), while minimizing the number of communication rounds. The CONGEST model [39] is similar to the LOCAL model, where the only difference is that the message-size is bounded by O(log n) bits.

分散グラフアルゴリズムの主な2つのモデルは、LOCALモデルとCONGESTモデルです。 LOCALモデル[34]には、計算上制限のないn個のノードの同期通信ネットワークがあります。各ノードには一意のO（log n）ビット識別子があります。 各通信ラウンドで、各ノードは無制限のサイズのメッセージを各ネイバーに送信できます。 ノードのタスクは、通信ラウンドの数を最小限に抑えながら、ネットワークのいくつかの関数（たとえば、その直径、最大独立集合の値など）を計算することです。 CONGESTモデル[39]はLOCALモデルに似ていますが、唯一の違いは、メッセージサイズがO（log n）ビットによって制限されることです。

In this work we study the problem of approximating MaxIS, which has been studied in both the LOCAL and CONGEST models [4, 15, 20, 23, 29, 30, 32]. In unweighted graphs, one can find a ∆-approximation for MaxIS by finding an MIS. In recent years, our understanding of the complexity of MIS has been substantially improving [13, 25, 26, 41], leading to a recent remarkable breakthrough by Rozhon and Ghaffari [41], where they show a deterministic poly(log n)-round algorithm for finding an MIS, even in the CONGEST model. This result also implies a randomized algorithm that finds an MIS with high probability in O(log ∆) + poly(log log n) rounds, in the CONGEST model [21, 26, 27, 41].

この論文では、LOCALモデルとCONGESTモデルの両方で研究されているMaxISの近似の問題を研究します[4、15、20、23、29、30、32]。 重み付けされていないグラフでは、MISを見つけることでMaxISのΔ近似を見つけることができます。近年、MISの複雑さに関する理解が大幅に向上しており[13、25、26、41]、RozhonとGhaffariによる最近の目覚ましい進歩[41]につながっています。ここで彼らはCONGESTモデルにおいても、MISを見つけるための決定論的なpoly（log n）ラウンドアルゴリズムを示しています。この結果は、CONGESTモデルで、O（log ∆）+ poly（log log n）ラウンドで高確率でMISを見つけるランダム化アルゴリズムも意味します[21、26、27、41]。

In a weighted graph, an MIS doesn’t necessarily constitute a ∆-approximation for MaxIS. For the weighted case, Bar-Yehuda et al. [8] showed a ∆-approximation algorithm in the CONGEST model that takes O(MIS(n, ∆) · log W) rounds, where MIS(n, ∆) is the running time for finding an MIS in graphs with n nodes and maximum degree ∆, and W is the maximum weight of a node in the graph (which can be as high as poly(n)). Whether their algorithm is deterministic or randomized, depends on the MIS algorithm that is used as a black-box.

重み付きグラフでは、MISは必ずしもMaxISのΔ近似を構成するわけではありません。重み付きの場合、Bar-Yehudaら[8]は、CONGESTモデルにおいてO（MIS（n、∆）・log W）ラウンドかかる∆近似アルゴリズムを示しました。ここで、MIS（n、∆）は、n個のノードと最大次数∆を持つグラフでMISを見つけるための実行時間であり、Wはグラフ内のノードの最大重み（poly（n）まで高くなる可能性があります）です。それらのアルゴリズムが決定論的であるかランダム化されているかは、ブラックボックスとして使用されるMISアルゴリズムに依存します。

In this work we present faster algorithms compared to [8], by paying only a (1+ε) multiplicative overhead in the approximation factor. Our main result (Theorem 2) is a randomized algorithm that achieves an exponential speed-up compared to [8]. Our result:

この論文では、近似係数に（1 +ε）乗法オーバーヘッドのみを支払うことにより、[8]と比較してより高速なアルゴリズムを提示します。 私たちの主な結果（定理2）は、[8]と比較して指数関数的な高速化を実現するランダム化アルゴリズムです。私たちの結果:

Theorem 1. There is an O(MIS(n, ∆)/ε)-round algorithm in the CONGEST model that finds a (1 + ε)∆-approximation for maximum-weight independent set. Whether the algorithm is deterministic or randomized, depends on the MIS algorithm that is run as a black-box.

定理1.CONGESTモデルにおいて、最大重み独立集合の（1 +ε）∆近似を見つけるO（MIS（n、∆）/ε）ラウンドアルゴリズムが存在します。 アルゴリズムが決定論的であるかランダム化されているかは、ブラックボックスとして実行されるMISアルゴリズムに依存します。

Theorem 2. There is a randomized (poly(log log n)/ε)-round algorithm in the CONGEST model that finds, with high probability, a (1 + ε)∆-approximation for maximum-weight independent set.

定理2.CONGESTモデルにおいて最大重み独立集合の（1 +ε）Δ近似を高確率で見つけるランダム化された（poly（log log n）/ε）ラウンドアルゴリズムが存在します。

Due to a lower bound of Ω(√log n/ log log n) that was given by Kuhn, Moscibroda and Wattenhofer [31], against any (possibly randomized) algorithm that finds an MIS, even in the LOCAL model, Theorem 2 implies that finding a (1 + ε)∆-approximation for MaxIS is exponentially easier than MIS.

Kuhn、Moscibroda、Wattenhofer [31]によって与えられたΩ（√logn/ log log n）の下限により、LOCALモデルであっても、MISを見つける（おそらくランダム化された）アルゴリズムに対して、定理2は MaxISの（1 +ε）Δ近似を見つけることは、MISよりも指数関数的に簡単であることを暗示しています。

Using the algorithm from Theorem 2, we can also get an improved approximation algorithm for a wide range of arboricity. Let α be the arboricity of the input graph (See also Definition 1). For graphs of arboricity α ≤ ∆/(8(1 + ε)), Theorem 3 improves upon [8] in both the running time and approximation factor.

定理2のアルゴリズムを使用すると、広範囲の樹木性に対して改良された近似アルゴリズムを取得することもできます。 αを入力グラフのarboricityとします（定義1も参照）。 arboricityα≤∆ /（8（1 +ε））のグラフの場合、定理3は実行時間と近似係数の両方で[8]を改善します。

Theorem 3. There is a randomized O(log n · poly log log n/ε)-round algorithm in the CONGEST model that finds, with high probability, an 8(1 + ε)α-approximation for maximum-weight independent set.

定理3.CONGESTモデルにおいて最大重み独立集合の8（1 +ε）α近似を高確率で見つけるランダム化されたO（log n・poly log log n /ε）ラウンドアルゴリズムが存在します。